

Obliczanie najmniejszej i największej wartości funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

Dane są:

1) funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$

2) przedział domknięty $[x_1, x_2]$.

Zadaniem jakie teraz rozwiążemy jest wyznaczenie najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej w przedziale.

Przypomnienie:

Wierzchołek paraboli to punkt:

$$W = (p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

Pierwszym etapem w rozwiązywaniu tego typu zadań, jest określenie, gdzie znajduje się wierzchołek paraboli, a dokładniej pierwsza współrzędna tego wierzchołka p . Czyli:

- Obliczamy $p = -\frac{b}{2a}$
- Jeżeli punkt p należy do przedziału $[x_1, x_2]$ wówczas obliczamy wartości funkcji w trzech punktach (na krańcach przedziału i w wierzchołku):

$$f(x_1)$$

$$f(x_2)$$

$$f(p)$$

i wybieramy spośród nich wartość maksymalną, bądź minimalną, w zależności od treści od zadania.

- Jeżeli punkt p nie należy do przedziału $[x_1, x_2]$ wówczas obliczamy wartości funkcji w dwóch punktach (tylko na krańcach przedziału):

$$f(x_1)$$

$$f(x_2)$$

i wybieramy spośród nich wartość maksymalną, bądź minimalną, w zależności od treści zadania.

Przykład 1

Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji f danej wzorem $f(x) = 2x^2 + 8x + 7$ w przedziale $[-4, -3]$.

Zgodnie z powyższym, najpierw sprawdzamy w jakim punkcie znajduje się wierzchołek paraboli:

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 2} = -2$$

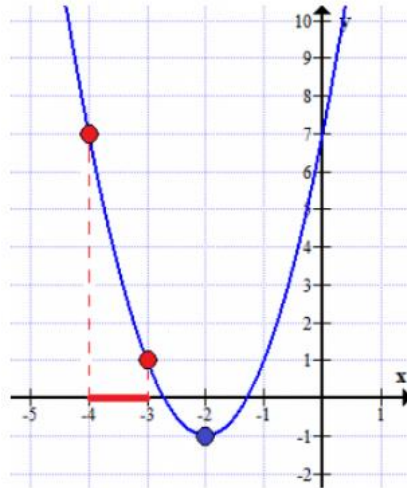
$$p \notin [-4, -3]$$

Ponieważ punkt p nie należy do przedziału $[-4, -3]$ to obliczamy wartości funkcji tylko na końcach przedziału:

$$f(-4) = 2 \cdot (-4)^2 + 8 \cdot (-4) + 7 = 32 - 32 + 7 = 7$$

$$f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + 8 \cdot (-3) + 7 = 18 - 24 + 7 = 1$$

Dla lepszego zobrazowania tego zadania, poniżej został umieszczony wykres funkcji f :



Największa wartość funkcji f w przedziale $[-4, -3]$ to 7. Jest to wartość funkcji f dla argumentu $x = -4$.

Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $[-4, -3]$ to 1. Jest to wartość funkcji f dla argumentu $x = -3$.

Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji f danej wzorem $f(x) = x^2 - 6x + 3$ w przedziale $[2, 5]$.